

Semaine 1:
Statique des fluides

Champs scalaire et vectoriel

Champ scalaire: $f(x, y, z, t)$

Un champ scalaire donne la valeur d'une grandeur physique scalaire en fonction de la position (x, y, z) et, éventuellement, du temps t .

Exemples: température $T(x, y, z, t)$, pression $P(x, y, z, t)$, ...

Champ vectoriel: $\vec{A}(x, y, z, t)$

Un champ vectoriel donne la valeur d'une grandeur physique vectorielle en fonction de la position (x, y, z) et, éventuellement, du temps t .

Exemples: champ électrique $\vec{E}(x, y, z, t)$, champ magnétique $\vec{B}(x, y, z, t)$, ...

Notations équivalentes
pour champ vectoriel:

$\vec{A}(x, y, z, t)$

$\mathbf{A}(x, y, z, t)$

Dérivés partielle

Champ scalaire:

$$f(\vec{x}, t) = f(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

variation de f le long x (pour $y, z, t = \text{const.}$)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}$$

variation de f le long y (pour $x, z, t = \text{const.}$)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta z}$$

variation de f le long z (pour $x, y, t = \text{const.}$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z, t + \Delta t) - f(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

variation de f le long t (pour $x, y, z = \text{const.}$)

Champ vectoriel: $\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(x, y, z, t) = A_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + A_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + A_z(x, y, z, t)\vec{e}_z$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial x} \vec{e}_y + \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A_i(x + \Delta x, y, z, t) - A_i(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \frac{\partial A_x}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{A_i(x, y + \Delta y, z, t) - A_i(x, y, z, t)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial z} \vec{e}_y + \frac{\partial A_z}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A_i(x, y, z + \Delta z, t) - A_i(x, y, z, t)}{\Delta z}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial A_x}{\partial t} \vec{e}_x + \frac{\partial A_y}{\partial t} \vec{e}_y + \frac{\partial A_z}{\partial t} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_i(x, y, z, t + \Delta t) - A_i(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

$i = x, y, z$

Opérateurs différentiels

Nabla: $\nabla \triangleq \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$

opérateur

Gradient: $\nabla f(x, y, z, t) \triangleq \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$

scalaire \rightarrow vecteur

“amplitude et direction de la variation la plus forte du champ scalaire”

Divergence: $\nabla \cdot \vec{A}(x, y, z, t) \triangleq \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$

vecteur \rightarrow scalaire

“flux locale par unité de volume”

$$\nabla \cdot \vec{A} \triangleq \text{div } \vec{A} \triangleq \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ \text{at } (x,y,z)}} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Rotationnel: $\nabla \times \vec{A}(x, y, z, t) \triangleq \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

vecteur \rightarrow vecteur

“circulation locale par unité de surface”

$$\vec{n} \cdot \nabla \times \vec{A} \triangleq \vec{n} \cdot \text{curl } \vec{A} \triangleq \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A} \triangleq \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \text{at } (x,y,z)}} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Laplacien: $\nabla^2 f(x, y, z, t) \triangleq \nabla \cdot \nabla f(x, y, z, t) \triangleq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

scalaire \rightarrow scalaire

“une valeur importante (positif ou négatif) du laplacien signifie que localement la valeur du champ scalaire (ou composant du champ vectoriel) est assez différente de la moyenne de son environnement (il prend des valeurs importantes dans des zones qui sont fortement concaves ou convexes)”

$$\nabla^2 \vec{A}(x, y, z, t) \triangleq \nabla^2 A_x \vec{e}_x + \nabla^2 A_y \vec{e}_y + \nabla^2 A_z \vec{e}_z$$

vecteur \rightarrow vecteur

Notations équivalentes pour les vecteurs unitaire des axes x, y, z : $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$

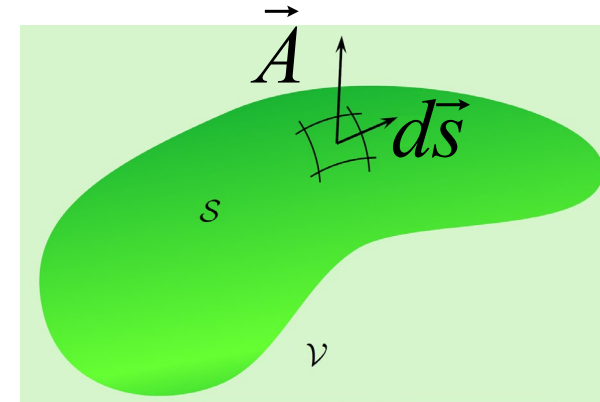
Théorèmes mathématiques importantes

(pour la physique des fluides et l'électromagnétisme)

Théorème de Gauss (ou de la divergence)

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

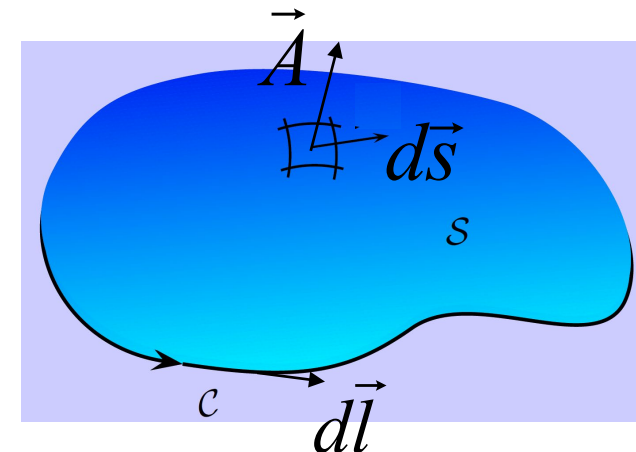
$$\oint_S f d\vec{s} = \int_V (\nabla f) dV$$



Théorème de Stokes (ou du rotationnel)

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_C f d\vec{l} = - \int_S (\nabla f) \times d\vec{s}$$



La physique des fluides (en bref)

Equation de **continuité** (fluides avec conservation de la masse...la plupart des fluides !!)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

«Conservation de la masse»

Equation de **Navier-Stokes** (fluides avec viscosité non-nulle)

$$-\nabla P + \rho \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

«F=ma»

P : pression [Pa]

\vec{v} : vitesse [m/s]

ρ : densité [kg/m³]

η : viscosité [Pa s]

\vec{g} : accélération de la pesanteur [m/s²]

Equation d'**Euler** (fluides parfaits)

$$-\nabla P + \rho \vec{g} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

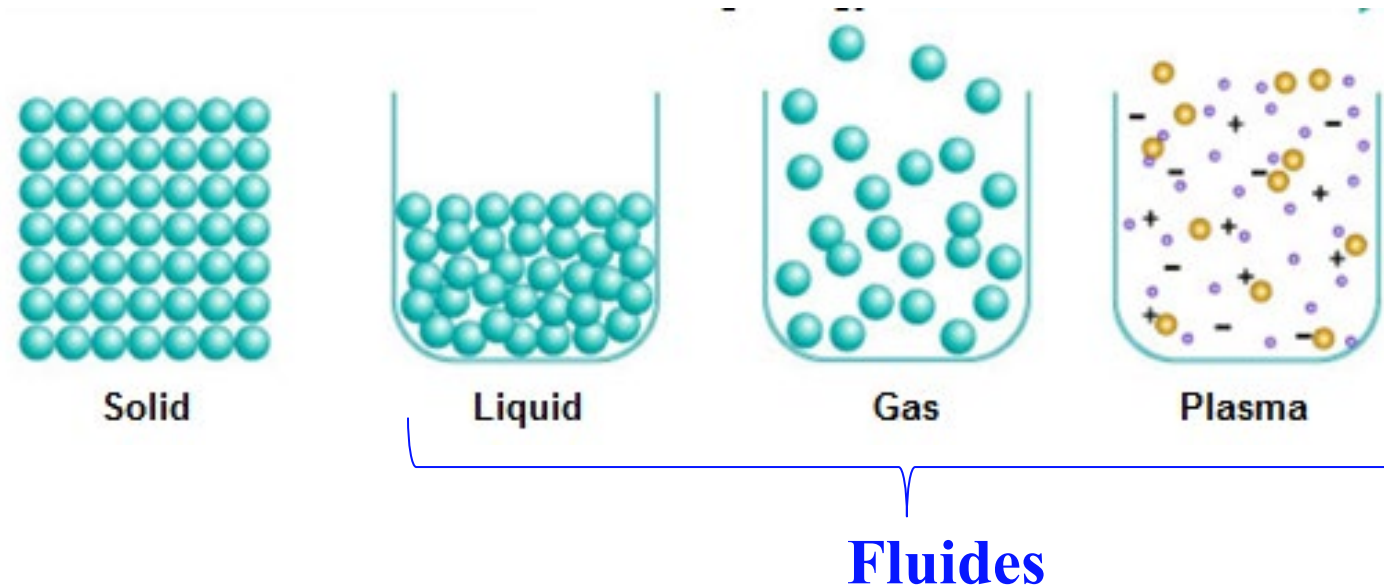
«F=ma»

Equation de **Bernoulli** (fluides parfaits et incompressible en écoulement stationnaire dans champ gravitationnelle constant dans la direction z)

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = \text{const}$$

«Conservation de l'énergie»

États de la matière



Fluide (définition):

corps se déplacent sous l'action d'une contrainte de cisaillement, quelle que soit sa valeur.

(les **liquides**, les **gaz**, et les **plasmas** sont des **fluides**).

Solides et fluides: propriétés

À l'échelle macroscopique, un **solide**:

- possède un volume propre (il est difficilement compressible; son volume ne dépend quasiment que de la température par effet de dilatation thermique, généralement faible) ;
- possède une forme propre (mais il peut se déformer sous l'effet de contraintes, en fonction de son élasticité et de sa ductilité).

Les particules (atomes, molécules ou ions) sont liées les unes aux autres par des liaisons chimiques qui fixent leurs positions relatives.

À l'échelle macroscopique, un **liquide**:

- possède un volume propre ;
- ne possède pas de forme propre: il prend la forme du récipient qui le contient ;
- a une surface libre au repos plane et horizontale (dans un champ de pesanteur uniforme vertical).

Les particules sont faiblement liées avec leur plus proches voisines. Contrairement à l'état solide, elles peuvent se déplacer spontanément les unes par rapport aux autres mais, contrairement à l'état gazeux, la compressibilité est très faible. On peut également dire que leur énergie thermique est suffisante pour leur permettre de se déplacer mais pas de s'échapper. Les molécules sont à des distances pratiquement égales à leur taille mais relativement libres de changer leurs positions l'une par rapport à l'autre.

À l'échelle macroscopique, un **gaz**:

- ne possède ni forme propre, ni volume propre ;
- tend à occuper tout le volume disponible.

Les particules sont très faiblement liées. Les molécules sont en moyenne plus éloignées les unes des autres que leur taille moyenne. La plupart du temps les molécules n'interagissent pas.

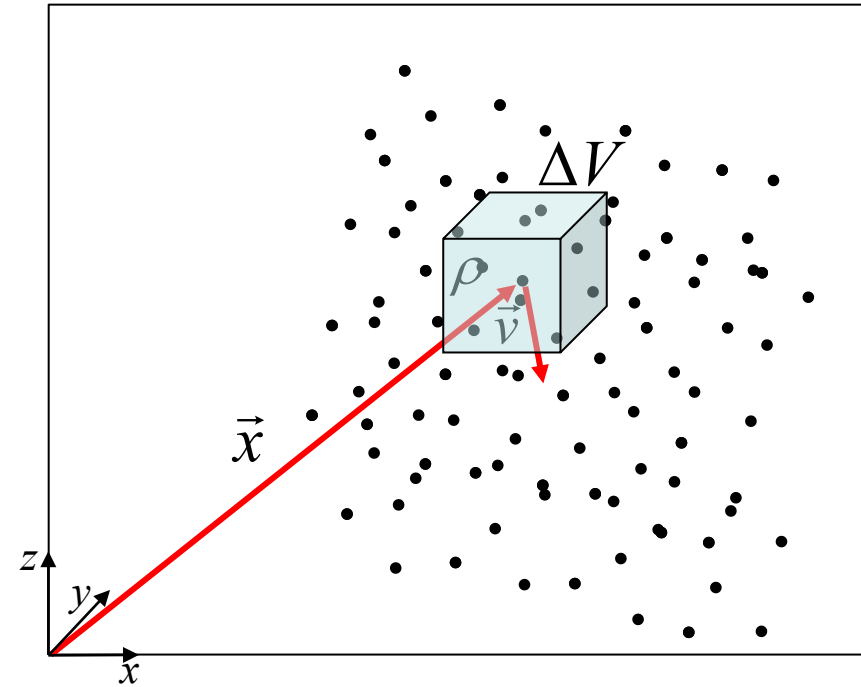
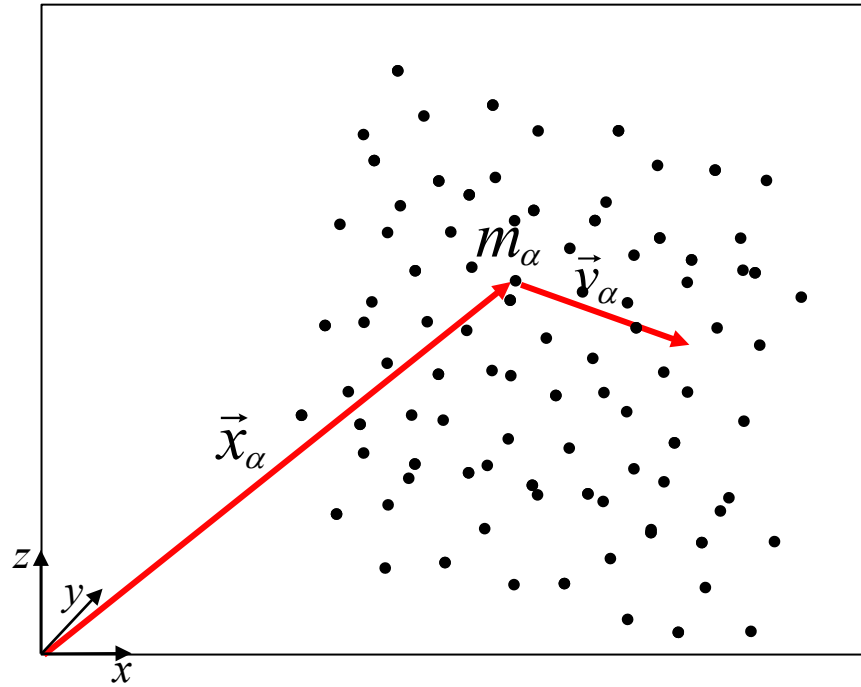
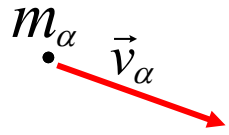
À l'échelle macroscopique, un **plasma**:

- ne possède ni forme propre, ni volume propre.
- est un gaz de particules (électrons, atomes, molécules,...) chargées électriquement (positivement et négativement), mais globalement neutre. Les particules interagissent via les forces électromagnétiques.

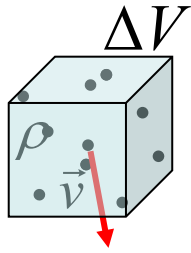
Dans ce cours, nous n'étudierons pas le plasma (bien que 99% de la matière de l'univers soit à l'état de plasma...!!).

Le modèle du fluide continu

Particule
(atome ou molécule)



Particule fluide
(ensemble d'atomes
ou de molécules)



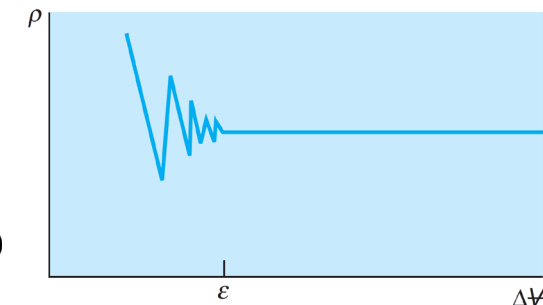
Vitesse du fluide:

$$\vec{v}(x, y, z, t) \triangleq \lim_{\Delta V \rightarrow \varepsilon} \frac{1}{N_{\Delta V}} \sum_{\alpha \in \Delta V} \vec{v}_{\alpha}$$

Densité du fluide:

$$\rho(x, y, z, t) \triangleq \lim_{\Delta V \rightarrow \varepsilon} \frac{1}{\Delta V} \sum_{\alpha \in \Delta V} m_{\alpha}$$

ε : petit volume mais qui contient encore
un grand nombre de molécules
(afin que la densité autour du point choisi
ne dépend pas du volume spécifique ε choisi)

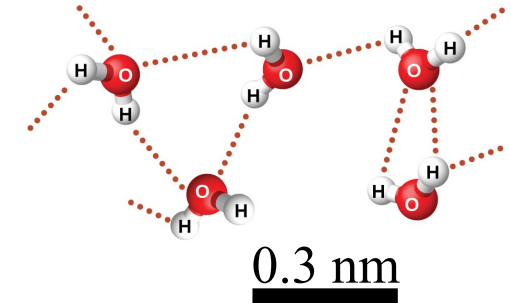


Particule fluide: Particule virtuelle censée représenter les molécules réelles au voisinage de la position (x, y, z) au temps t .

Note 1: Densité des fluides et validité du modèle continu

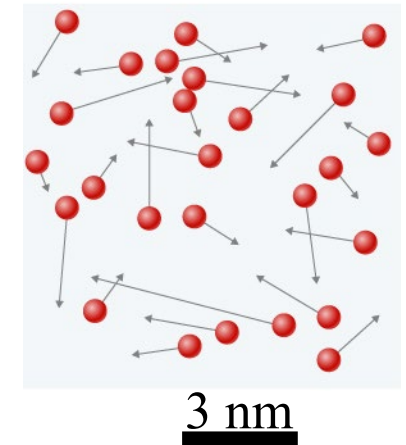
Eau (1 atm, 300 K):

densité ρ :	$\cong 1000 \text{ kg/m}^3$ ($\cong 3 \times 10^{10} \text{ molécules}/\mu\text{m}^3$)
distance moyen entre le molécules:	$\cong 0.3 \text{ nm}$
libre parcours moyen λ :	$\cong 0 \text{ nm}$



Air (1 atm, 300 K):

densité ρ :	$\cong 1 \text{ kg/m}^3$ ($\cong 3 \times 10^7 \text{ molécules}/\mu\text{m}^3$)
distance moyen entre le molécules:	$\cong 3 \text{ nm}$
libre parcours moyen λ :	$\cong 100 \text{ nm}$



Le modèle du fluide continu est valable pour des volumes avec diamètre beaucoup plus grandes que le libre parcours moyen (et beaucoup plus grande de la distance moyen entre le molécules). Avec l'hypothèse continue, les propriétés (densité, vitesse, pression, ..) peuvent varier d'un point à l'autre et de l'instant à l'instant mais sont une fonction continue de (x, y, z) et du temps t .

Note 2: Vitesse d'une molécule vs vitesse du fluide

La vitesse de la particule fluide \vec{v} est, en général, différente de la vitesse de chaque molécule \vec{v}_α contenue dans le volume de la particule fluide (i.e., $\vec{v} \neq \vec{v}_\alpha$).

Energie cinétique $E_{c,\alpha}$ d'une molécule de masse m_α :
$$E_{c,\alpha} = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

Pour un gas idéal:
$$E_{c,\alpha} = \frac{3}{2} kT$$

donc:
$$v_\alpha = \sqrt{\frac{3kT}{m_\alpha}}$$

Exemple:

Molécules d'azote (N_2 , $m_\alpha \cong 4.7 \times 10^{-26}$ kg) dans l'air à 300 K:

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{3kT}{m_\alpha}} \cong 500 \text{ m/s} \cong 1800 \text{ km/h}$$

\Rightarrow la vitesse d'une molécule d'azote dans l'air à 300 K ($v_\alpha \cong 1800$ km/h) est beaucoup plus grand de la vitesse du fluide dans un ouragan ($v \cong 120$ km/h).

Quantités du modèle fluide

Champs vectoriels:

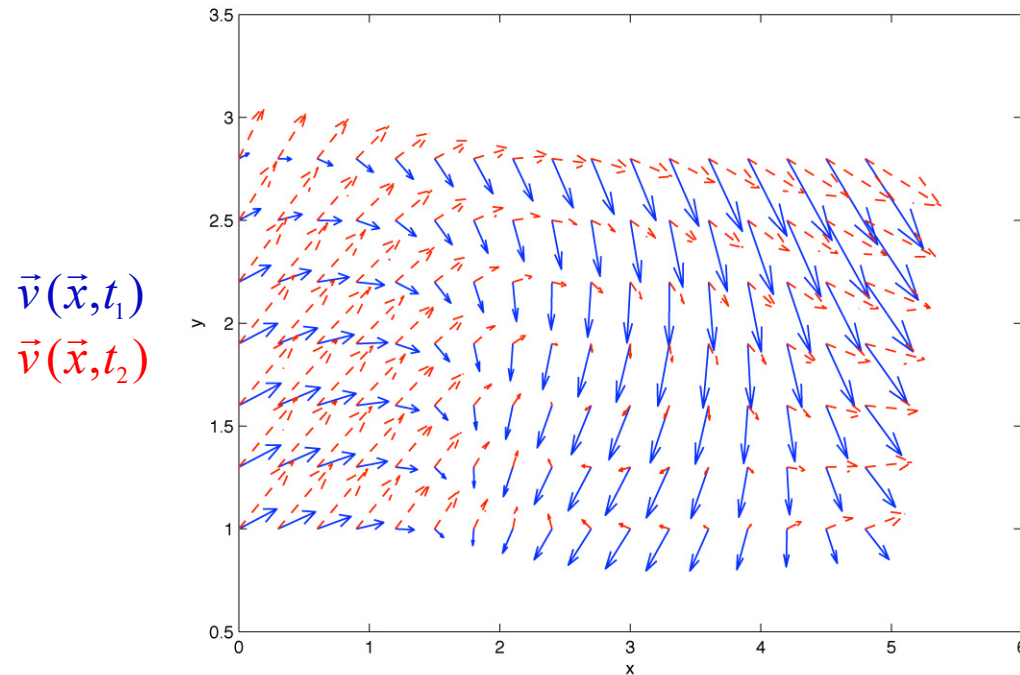
Vitesse: $\vec{v}(\vec{x}, t) = v_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + v_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + v_z(x, y, z, t)\vec{e}_z$

Champs scalaires:

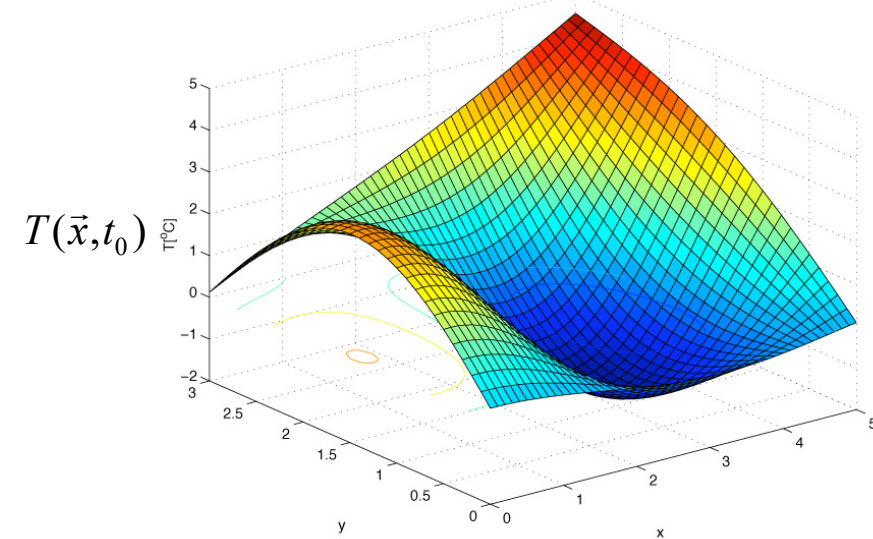
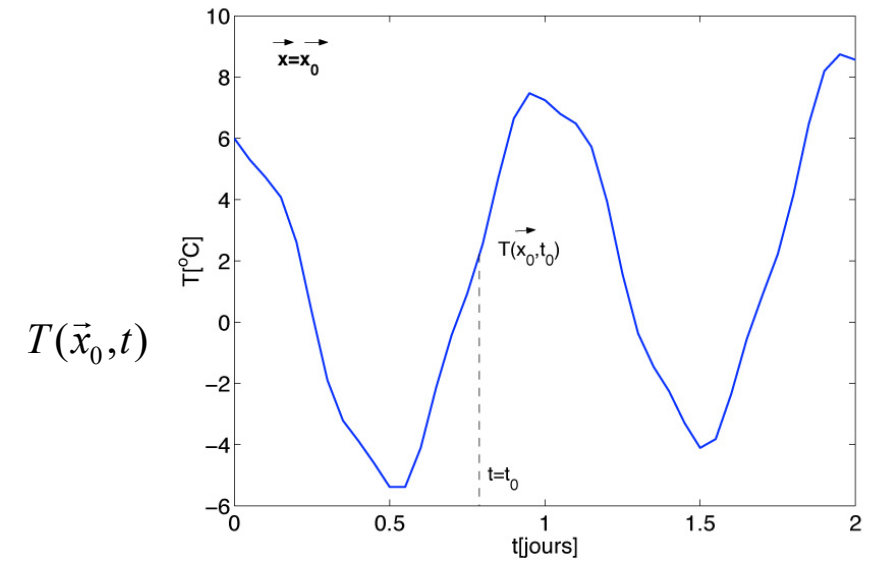
Densité: $\rho(\vec{x}, t) = \rho(x, y, z, t)$

Pression: $P(\vec{x}, t) = P(x, y, z, t)$

Temperature: $T(\vec{x}, t) = T(x, y, z, t)$



La dynamique des particules fluides est décrit par des équations différentielle (voir suite)
reliant entre eux les champs scalaires et vectorielles associés aux particules fluides



Pression dans un fluide

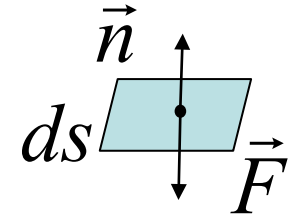
La pression est l'intensité de la force qu'exerce un fluide par unité surface.

La **pression** est une grandeur physique **scalaire** ou **tensorielle** définie en tout point du fluide (i.e., pas seulement sur une paroi).

Dans ce cours, nous supposerons que la pression est **scalaire** (i.e., isotrope).

La **force de pression sur une surface** $d\vec{s}$ est une grandeur physique **vectorielle** perpendiculaire à la surface

($d\vec{F} = -P d\vec{s} = -P ds \vec{n}$, \vec{n} : vecteur unitaire normal à la surface ds).



La **force de pression par unité de volume** est une grandeur physique **vectorielle** définie en tout point du fluide

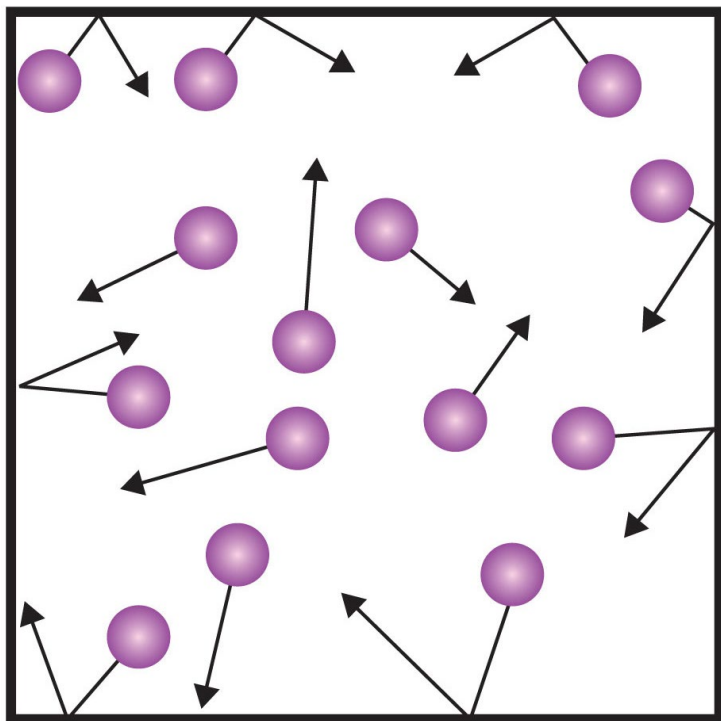
($\vec{f} = -\nabla P$) (voir les pages suivantes).

Note: Pression isotrope \neq Pression homogène

Pression dans un fluide:

Différence entre les gaz et les liquides

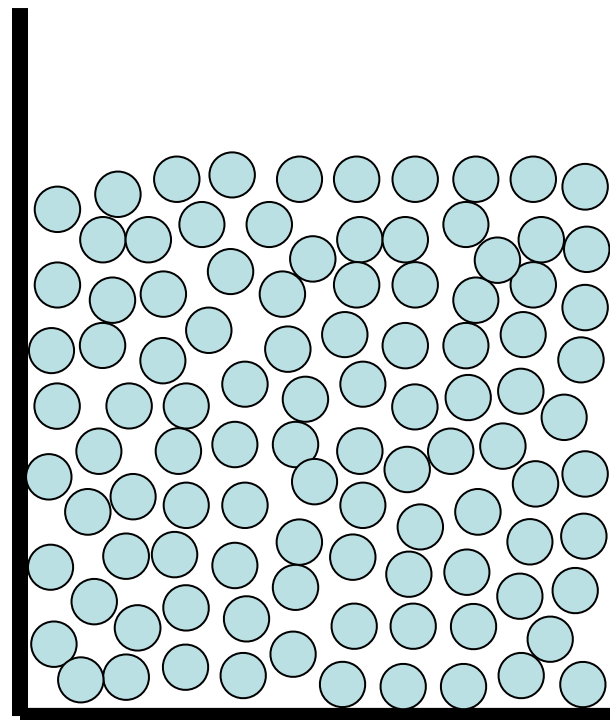
Gaz



La pression est (approx.) **linéairement proportionnel** à l'énergie cinétique, à la densité n (en molécules/m³), et à la température T (en K) des atomes/molécules.

$$P \cong \frac{1}{3}nm \langle v_{\alpha}^2 \rangle \cong nk_B T$$

Liquides



La pression dépend de manière **non linéaire** de l'énergie cinétique, de la densité n (en molécules/m³), et de la température T (en K) des atomes/molécules. (voir 1.22).

Forces de pression sur un élément fluide

$$d\vec{F} = -\nabla P dV$$

Force de pression sur le volume dV (en N)

$$\vec{f} = -\nabla P$$

Force de pression par unité de volume (en N/m³)

La pression P joue le rôle de potentiel pour la force de pression par unité de volume.

Démonstration:

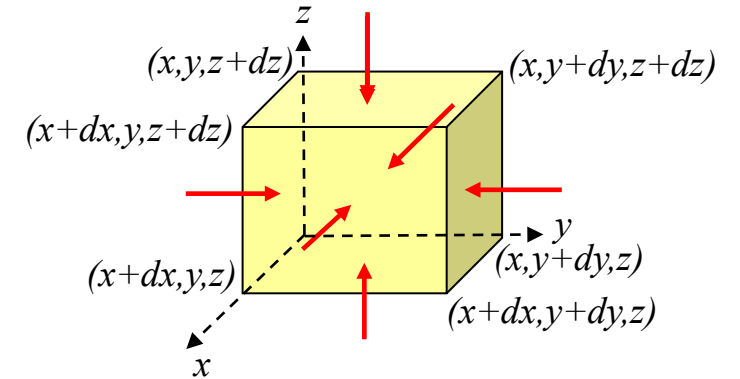
La force totale de pression sur l'élément fluide dV est (à moins de termes infinitésimaux d'ordre supérieur):

$$d\vec{F} = [-P(x+dx, y, z)dydz + P(x, y, z)dydz] \vec{e}_x + [-P(x, y+dy, z)dxdz + P(x, y, z)dxdz] \vec{e}_y + [-P(x, y, z+dz)dxdy + P(x, y, z)dxdy] \vec{e}_z$$

$$dV = dxdydz$$

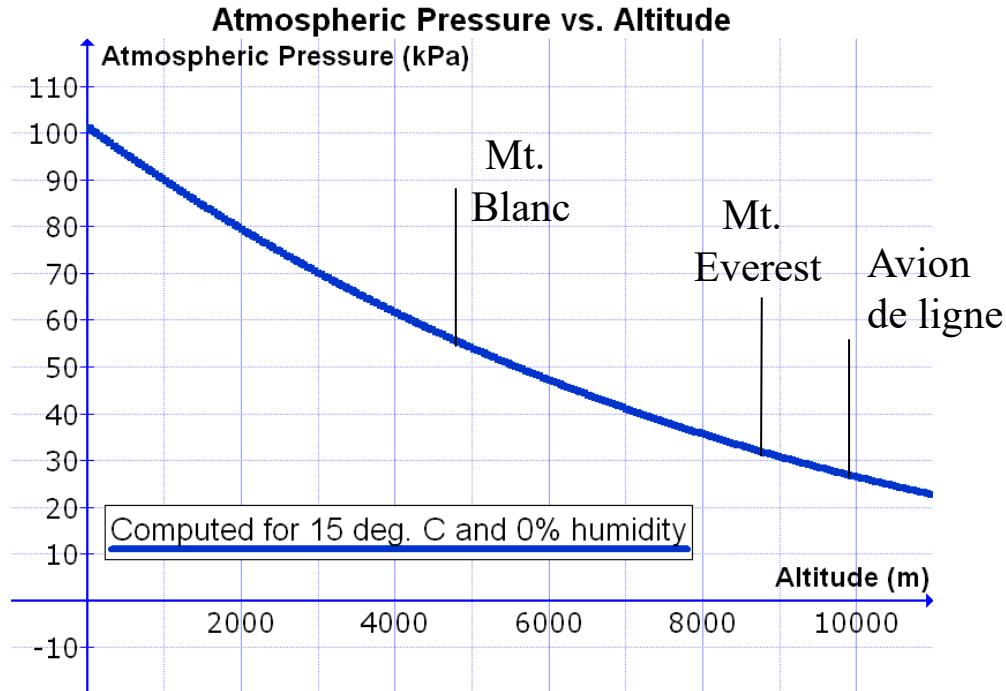
$$\Rightarrow d\vec{F} = -\frac{P(x+dx, y, z) - P(x, y, z)}{dx} dV \vec{e}_x - \frac{P(x, y+dy, z) - P(x, y, z)}{dy} dV \vec{e}_y - \frac{P(x, y, z+dz) - P(x, y, z)}{dz} dV \vec{e}_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{f} = -\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \vec{e}_z \Rightarrow d\vec{F} = -\nabla P dV$$



Pression atmosphérique

Note 1: La pression atmosphérique dépend de l'altitude au-dessus du niveau de la mer.



4300 m

2000 m

300 m

Cette bouteille en plastique a été scellée à 4300 m d'altitude et a été écrasée par l'augmentation de la pression atmosphérique à 2000 m et à 300 m.

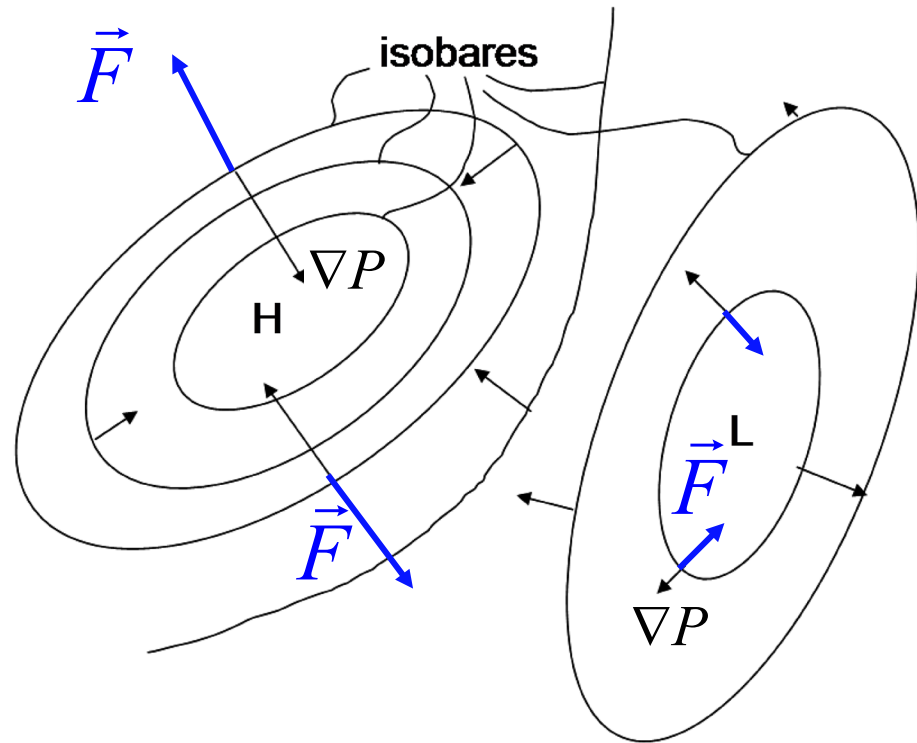
Note 2: La pression atmosphérique dépend aussi des conditions météorologiques, avec une variation maximale de l'ordre de 10%.

Au niveau de la mer, la pression moyenne (également appelée normale) est, par définition, de 101.1325 kPa.
($1.01325 \times 10^5 \text{ Pa} = 1013.25 \text{ hPa} = 1 \text{ atm} = 1.01325 \text{ bar}$).

Pression atmosphérique min.: 870 hPa (Philippines, typhon Tip, 12.10.1979)

Pression atmosphérique max.: 1086 hPa (Mongolie, 20.01.2010)

Pression atmosphérique et écoulement des masses d'air



Force de pression $\vec{F} = -\nabla P dV$

Force de Coriolis $\vec{F}_C = 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} \rho dV$

À nos latitudes il se produit souvent une situation où les zones de haute et basse pression (anticyclones, dépressions) sont stationnaires pour de longues périodes.

Une particule fluide de l'air, elle subit une force de pression, opposée au gradient de pression, qui tendrait à la pousser du côté des basses pressions, tendant donc à "remplir" celle-ci, et à équilibrer les pressions.

Comment se fait-il alors que la pression reste stationnaire ?

C'est la **force de Coriolis** qui peut équilibrer la **force de pression**.

Les masses d'air s'écoulent, dans cette situation, *tangentiellement* aux isobares. La force de Coriolis est telle que dans l'hémisphère Nord le mouvement des masses d'air tourne dans le sens des aiguilles d'une montre autour des anticyclones et dans le sens inverse autour des dépressions. Dans l'hémisphère sud, c'est l'inverse.



Le sens de rotation de cette zone de basse pression tournant au large de l'Islande est dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (dû aux effets combinés de la force de Coriolis et du gradient de pression).

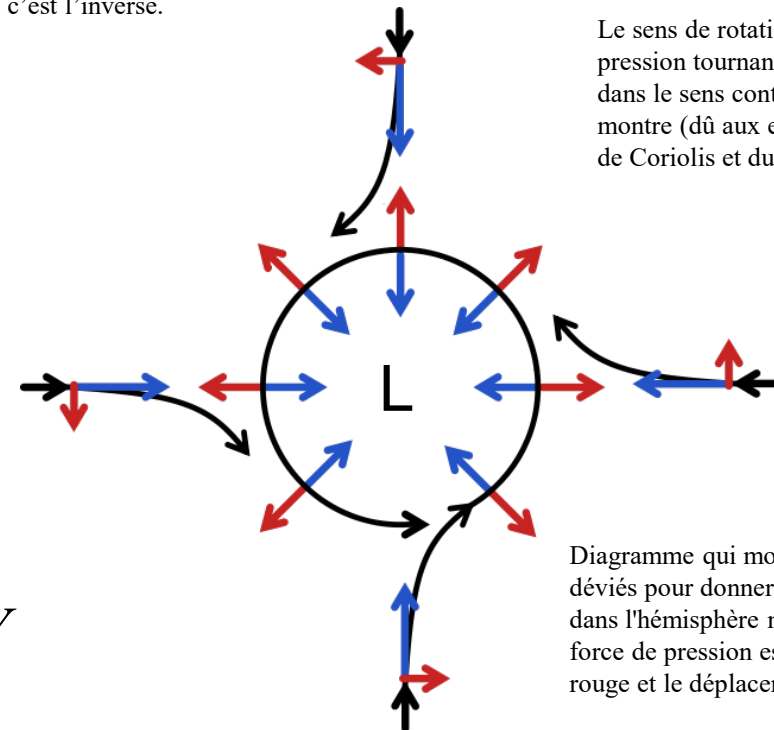
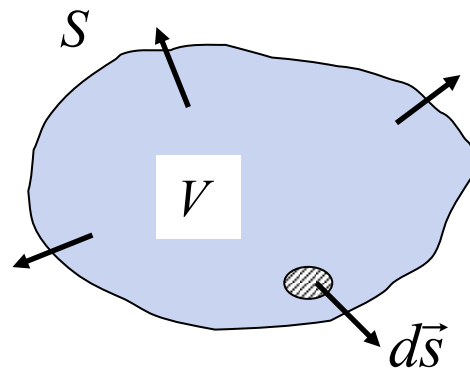


Diagramme qui montre comment les vents sont déviés pour donner une circulation anti-horaire dans l'hémisphère nord autour d'une dépression. La force de pression est en bleu, celle de Coriolis en rouge et le déplacement en noir

Force de pression sur un volume V macroscopique



Théorème de Gauss

$$\int_V \nabla f dV = \oint_S f d\vec{s} \quad f : \text{champ scalaire quelconque}$$

$$\vec{F} = -\int_V \nabla P dV = -\oint_S P d\vec{s}$$

Force de pression sur le volume dV

Forces de pression sur le volume V

Force de pression sur le volume V

=

Forces de pression sur la surface S fermée qui entoure V

Equilibre statique

Un fluide est en équilibre statique si chaque élément de volume dV est en équilibre statique.

Equilibre statique: somme de forces égale à zéro et vitesse égal à zéro.

$$\text{Equilibre statique: } \quad \sum \vec{f}_i = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall \vec{x}, \forall t$$

Note 1. Fluide en équilibre statique en présence de la force de pesanteur

$$\text{Force de pression par unité de volume: } \quad \vec{f} = -\nabla P$$

$$\text{Force de pesanteur par unité de volume: } \quad \vec{f}_g = \rho \vec{g}$$

$$\text{Equilibre statique: } \quad \sum \vec{f}_i = 0 \Leftrightarrow -\nabla P + \rho \vec{g} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\nabla P + \rho \vec{g} = 0$$

Fluide incompressible

Un fluid est dit **incompressible** si sa densité est constante dans le temps et uniforme dans l'espace:

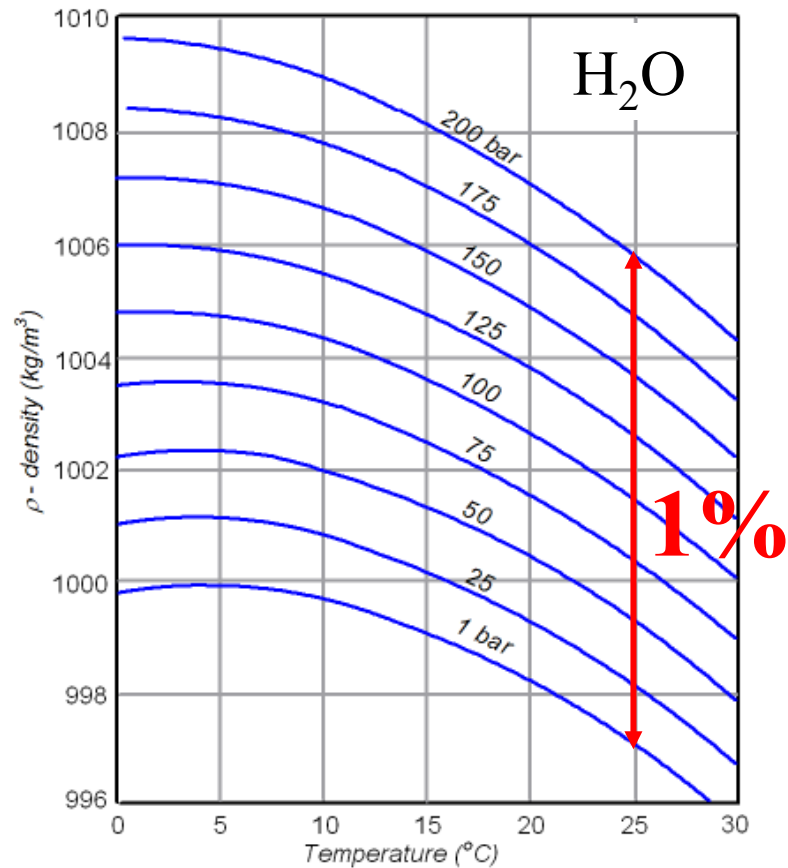
$$\boxed{\rho(\vec{x}, t) = \text{const}} \Leftrightarrow \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial z} = 0 \quad \forall \vec{x}, \forall t$$

Note 1. Attention: Fluide incompressible **ne vaut pas** dire $P(\vec{x}, t) = \text{const}$.

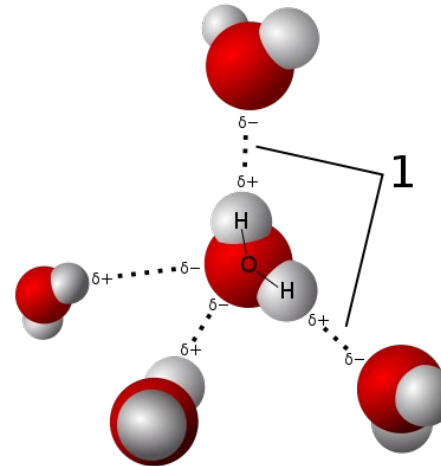
Note 2. Definition equivalent: Un fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe.

Note 3. En réalité, tous les fluides sont compressibles, certains plus que d'autres.

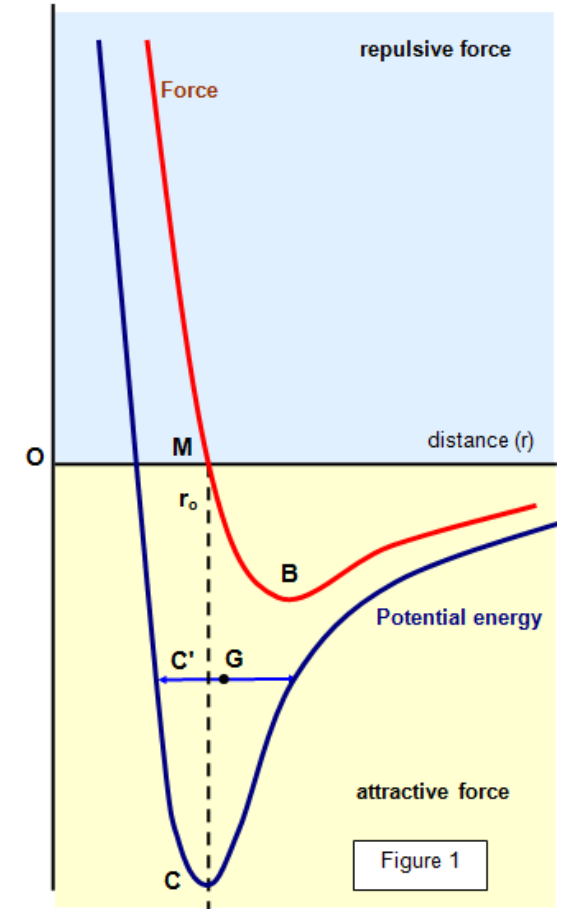
La compressibilité de l'eau (et de tous les liquides) est très faible mais pas zéro.



1% de variation de la densité de 1 bar à 200 bars
(pression à 2000 m de profondeur)



À partir de la position d'équilibre, nous devons appliquer une force importante pour réduire la distance entre les molécules et donc augmenter la densité. Une petite variation de la distance entre les molécules et donc de la densité correspond à une grande variation de la pression.



Equilibre statique pour un fluide incompressible (soumis à la pesanteur)

Force de pesanteur par unité de volume: $\vec{f}_{ext} = \rho \vec{g}$

Fluide incompressible:

$$\rho = \text{const}$$

Equilibre statique:

$$-\nabla P + \rho \vec{g} = 0$$

Supposons:

$$\vec{g} = \text{const} = -g \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \rho g = \text{const} &\Rightarrow \nabla(\rho g z) = \\ &= \rho g \nabla z = \\ &= \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \\ &= \rho g \frac{\partial z}{\partial z} \vec{e}_z = \rho g \vec{e}_z \\ &\Rightarrow \nabla(\rho g z) = \rho g \vec{e}_z \end{aligned}$$

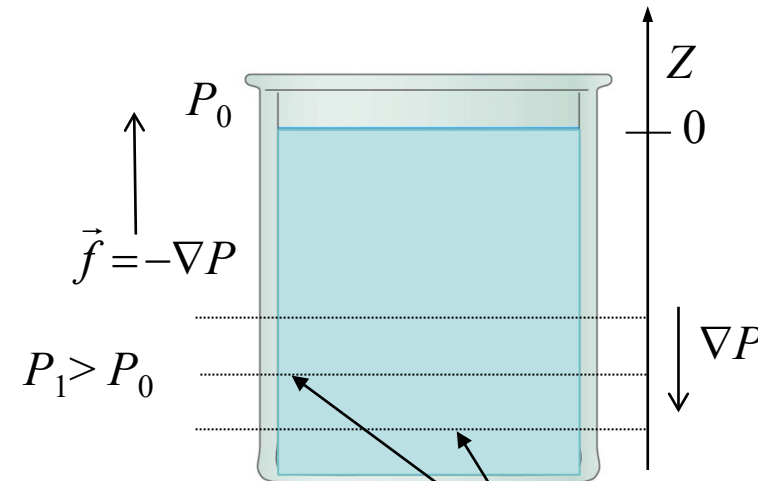
$$\Rightarrow \rho g \vec{e}_z = \nabla(\rho g z) \Rightarrow$$

$$-\nabla P - \nabla(\rho g z) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla(P + \rho g z) = 0 \Rightarrow \boxed{P + \rho g z = \text{const}}$$

$$\text{Si } P(z = 0) = P_0 \Rightarrow \boxed{P(z) = P_0 - \rho g z}$$

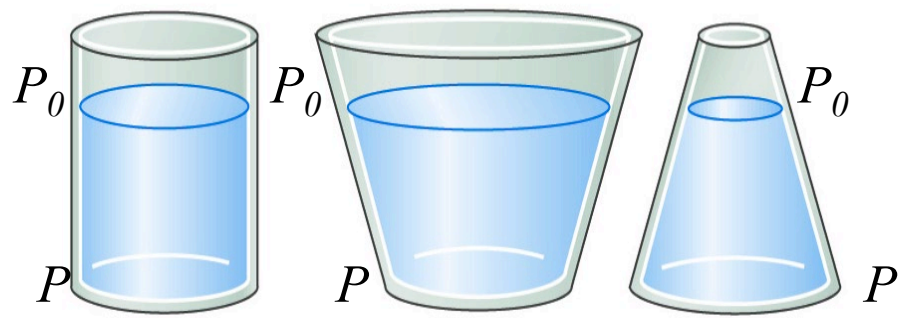
Attention: ces équations sont valables que pour un fluide incompressible et statique !



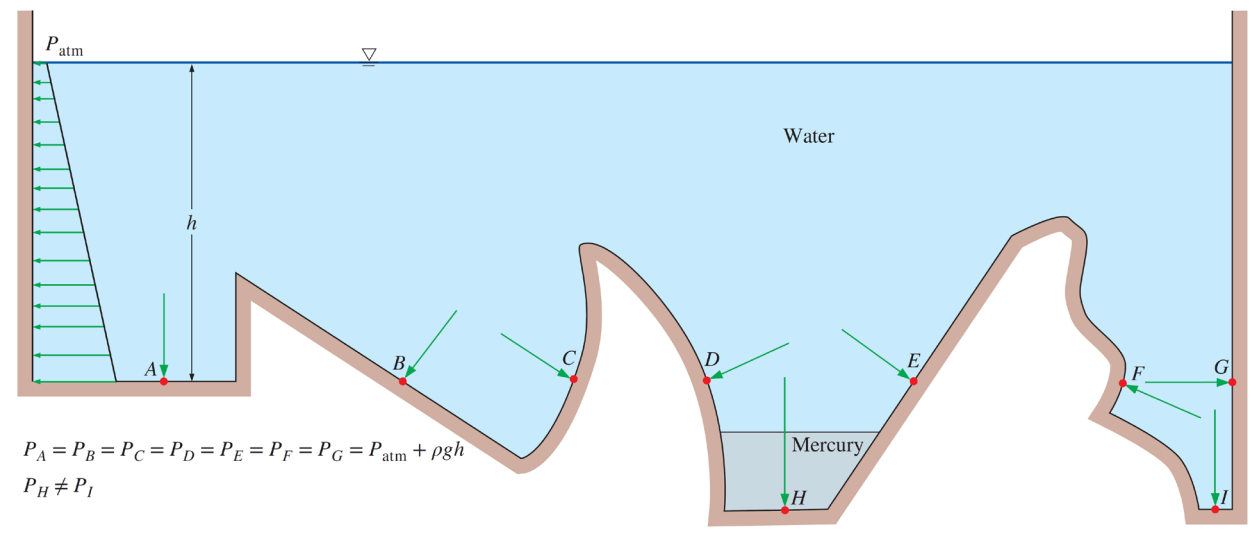
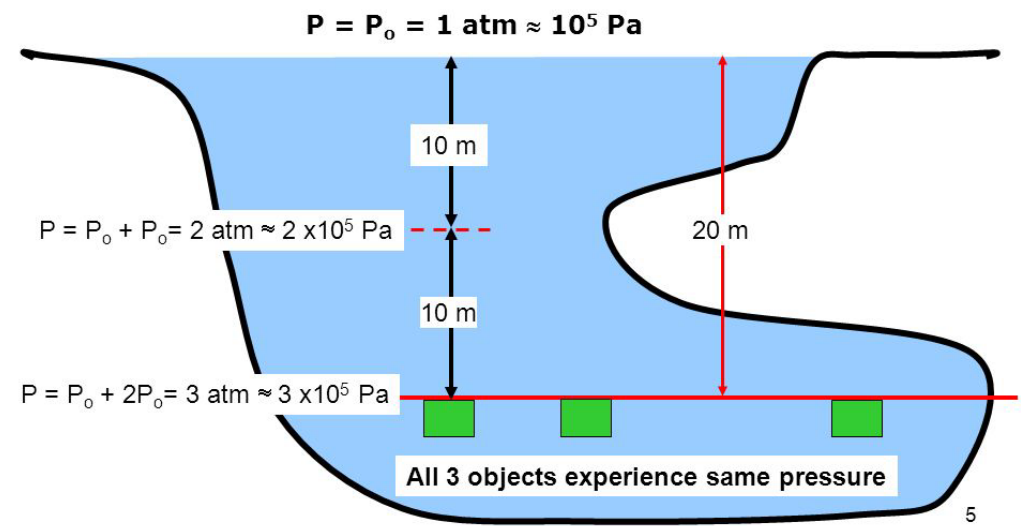
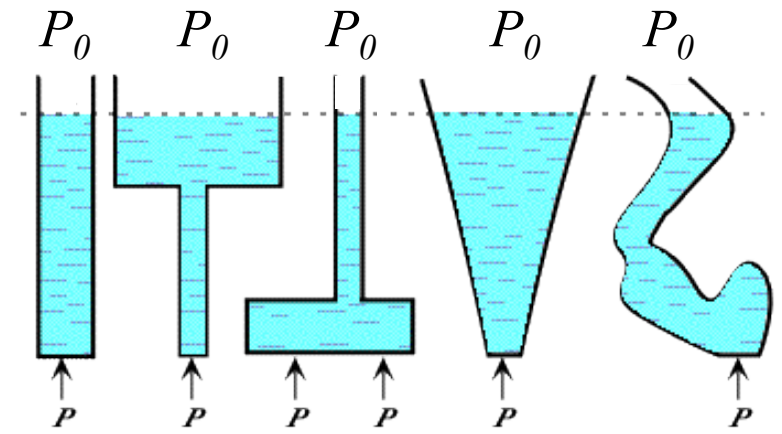
En équilibre statique, les isobares sont aussi les surfaces équipotentielles de la force de pesanteur !!

Note 1:

Pour liquide incompressible en équilibre statique, la **pression** est la même en tous les points du même plan horizontal dans un fluide donné, quelle que soit la géométrie du réservoir, à condition que tous les points soient reliés par le même fluide.



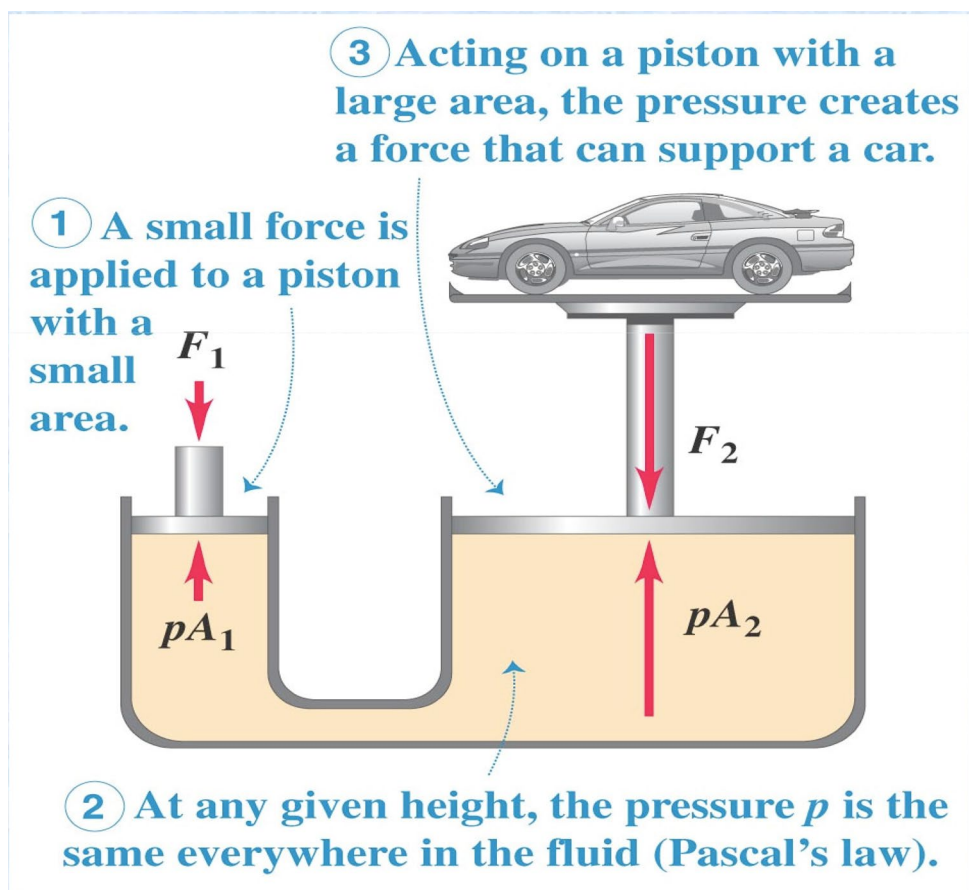
$$P(z) = P_0 - \rho g z$$



Note 2:

Pour liquide incompressible en équilibre statique, la pression est la même en tous les points du même plan horizontal dans un fluide donné, quelle que soit la géométrie du réservoir, à condition que tous les points soient reliés par le même fluide, **mêmes en présence de force externes.**

Exemple: soulever une voiture de 1000 kg avec le poids d'un homme de 100 kg.



A_1 : surface du piston 1 A_2 : surface du piston 2

$$A_1 \ll A_2 \quad P_1 A_1 = F_1 \quad P_2 A_2 = F_2$$

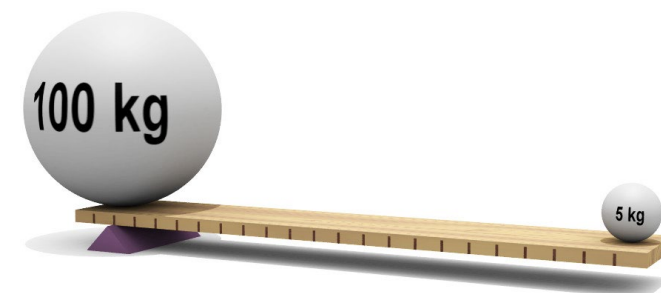
Si le niveau de liquide est le même

dans les deux côtés du vérin hydraulique: $P_1 = P_2 = p$

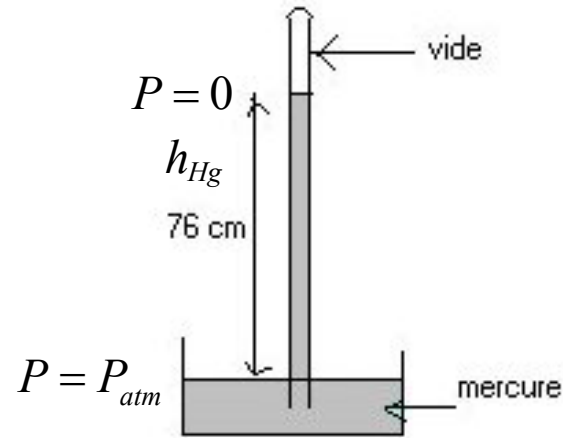
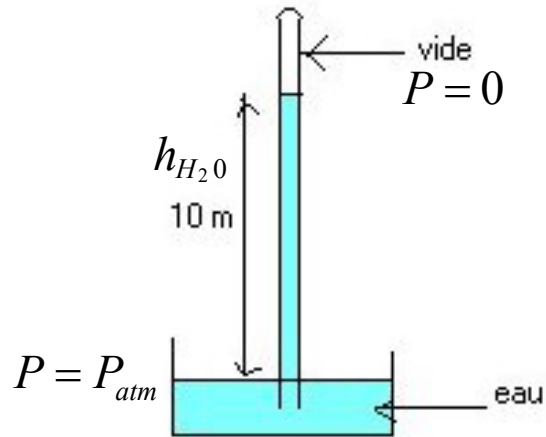
\Rightarrow

$$F_1 \ll F_2$$

«Analogie» avec le principe du levier



Note 3: Tube de Torricelli pour mesurer la pression atmosphérique.



Si $P(z=0) = P_{atm}$ et $P(z=h) = 0 \Rightarrow$

$$\rho g h = P_{atm} \Rightarrow h = \frac{P_{atm}}{\rho g}$$

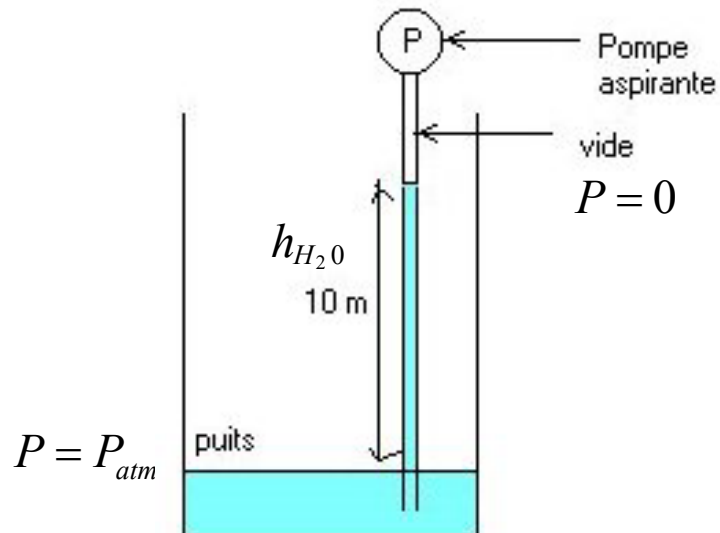
Ex:

$$P_{atm} \cong 10^5 \text{ Pa}, g \cong 9.8 \text{ m/s}^2,$$

$$\rho_{H_2O} \cong 1000 \text{ kg/m}^3, \rho_{Hg} \cong 13500 \text{ kg/m}^3$$

$$\Rightarrow h_{H_2O} \cong 10 \text{ m}, h_{Hg} \cong 0.76 \text{ m}$$

Note 4: Pompage des «puits»



Si nous utilisons une pompe positionnée au sommet du puits, nous ne pouvons pas pomper l'eau à plus de 10 m de profondeur, quelle que soit la puissance de la pompe.

On peut pomper de l'eau à plus de 10 mètres de profondeur, mais seulement avec une pompe «en bas».

Note 5: Paradoxe de l'hydrostatique

Paradoxe:

Les trois recipients, de même surface de base et masse négligiable, sont remplis d'eau à la même hauteur.

Si ces recipients sont posés sur une balance, le poids indiqué est différent, bien que la pression et donc la force de pression au fond des recipients sont les mêmes.

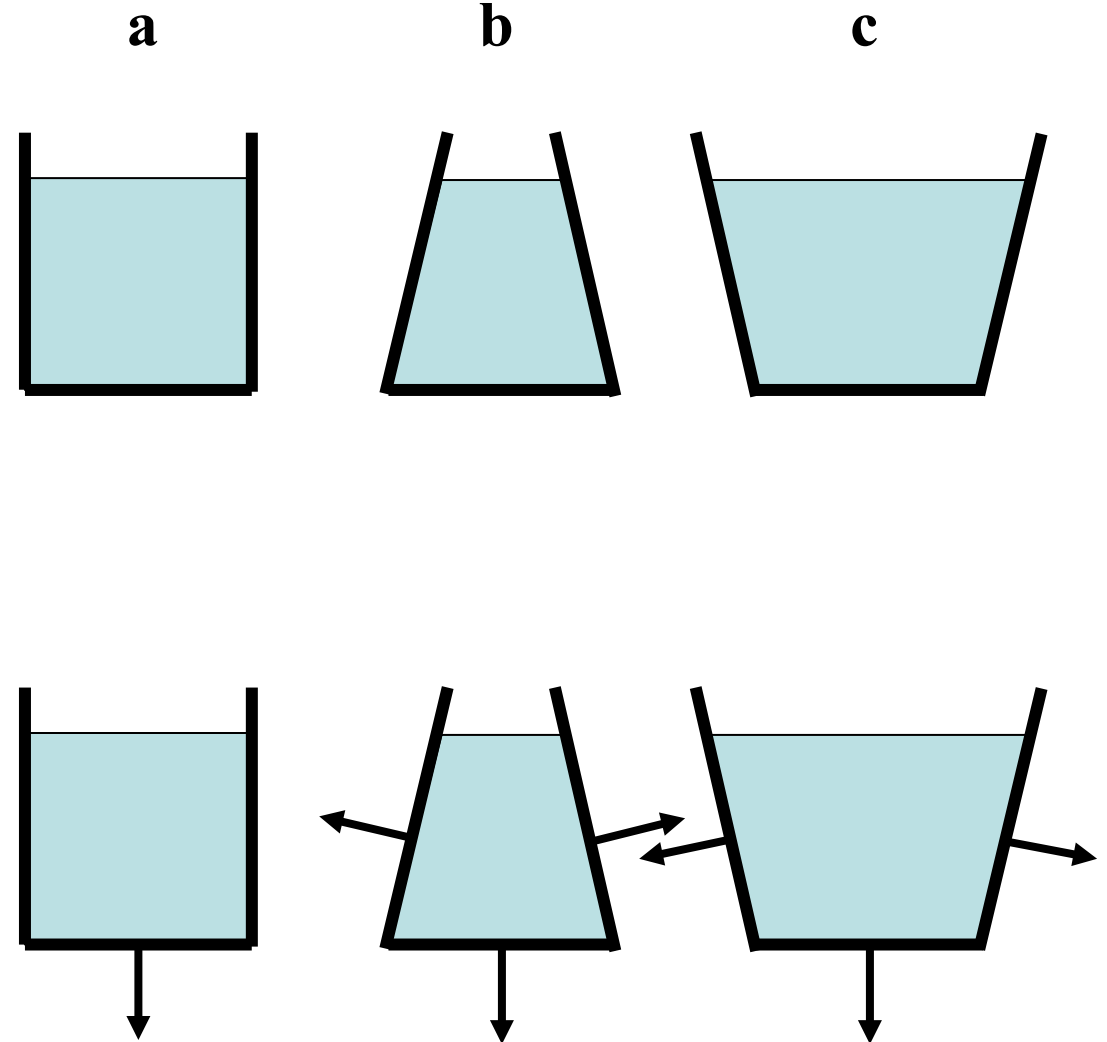
Explication du paradoxe:

La force de pression est la même sur le fond des recipients mais la force de pression agissant sur les parois latérales n'est pas la même.

Les forces sur les parois latérales contribuent à: augmenter (c) ou à réduire (b) le poids.

Dans le cas (a), le poids est égal à la force de pression.

Ceci est bien sûr compatible avec le fait que le volume d'eau et donc la masse d'eau est plus grande en (c) qu'en (a) et (b).

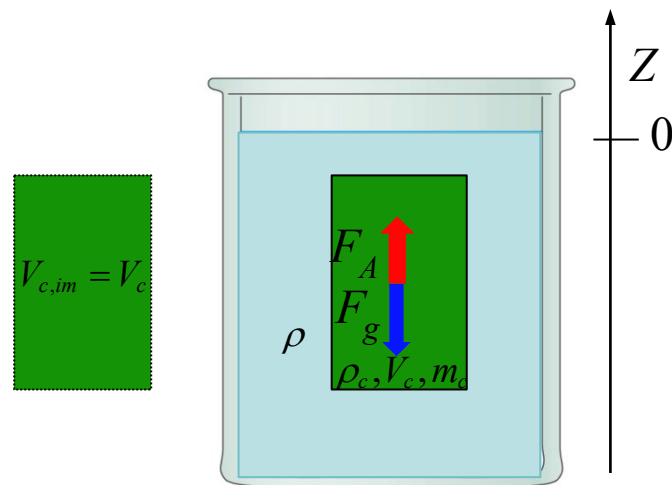


Poussée d'Archimède

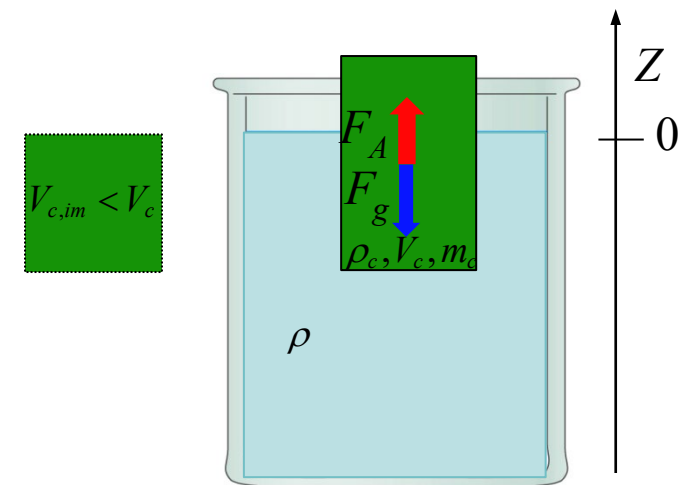
(corps dans fluide incompressible soumis à la pesanteur)

Poussée d'Archimède = Poids du fluide déplacé

$$\vec{F}_A = mg\vec{e}_z = \rho V_{c,im} g\vec{e}_z$$



Corps entièrement immergé



Corps partiellement immergé

Note: La poussée d'Archimède dépend du volume du corps mais pas de sa forme!

Corps entièrement immergé

Démonstration:

Consideron un corps ayant un volume V_c et densité ρ_c (i.e., masse $m_c = \rho_c V_c$)

entièrement immergé dans un fluide incompressible de densité ρ soumis à la pesanteur $\vec{g} = g\vec{e}_z$ ($\vec{g} = \text{const.}$):

\Rightarrow

Force de pression sur V_c (appelé, dans ce cas, poussée d'Archimède):

$$\vec{F} = \vec{F}_A = -\int_{V_c} \nabla P dV = -\oint_{S_c} P d\vec{s} \quad \text{avec} \quad P(z) = P_0 - \rho g z$$

\Rightarrow

$$\vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \vec{F}_6 \quad \text{mais:} \quad \vec{F}_3 = -\vec{F}_4 \quad \vec{F}_5 = -\vec{F}_6$$

$$\Rightarrow \vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

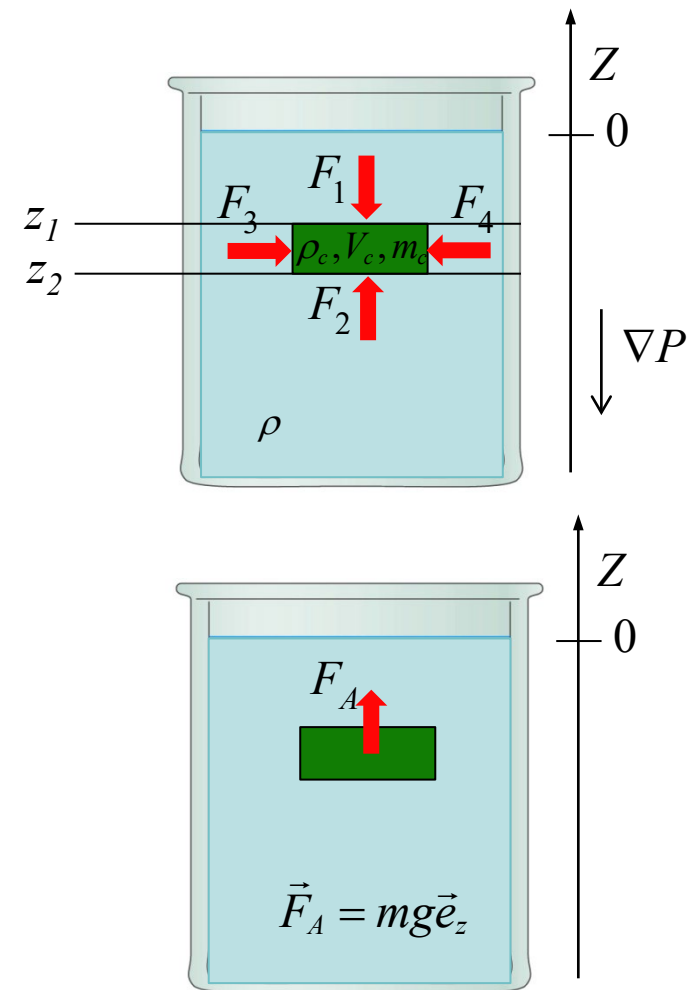
$$\vec{F}_1 = \int_{S_1} -P_1 d\vec{s}_1 = -(P_0 + \rho g |z_1|) S_1 \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_2 = \int_{S_2} -P_2 d\vec{s}_2 = (P_0 + \rho g |z_2|) S_2 \vec{e}_z$$

$S_1 = S_2$ (pour la forme du corps dans la figure) \Rightarrow

$$\vec{F}_A = \rho g |z_1 - z_2| S \vec{e}_z = \rho g V_c \vec{e}_z = m g \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_A = m g \vec{e}_z}$$



Corps partiellement submergé

Démonstration:

Considérons un corps ayant un volume V_c et densité ρ_c (i.e., masse $m_c = \rho_c V_c$)

partiellement immergé dans un fluide incompressible de densité ρ soumis à la pesanteur $\vec{g} = g\vec{e}_z$ ($\vec{g} = \text{const.}$):

\Rightarrow

Force de pression sur V_c (appelé, dans ce cas, poussée d'Archimède):

$$\vec{F} = \vec{F}_A = -\int_{V_c} \nabla P dV = -\oint_{S_c} P d\vec{s} \quad \text{avec} \quad P(z) = P_0 - \rho g z \quad \text{pour} \quad z < 0 \quad ; \quad P(z) = P_0 \quad \text{pour} \quad z \geq 0$$

\Rightarrow

$$\vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \vec{F}_6 \quad \text{mais:} \quad \vec{F}_3 = -\vec{F}_4 \quad \vec{F}_5 = -\vec{F}_6$$

$$\Rightarrow \vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

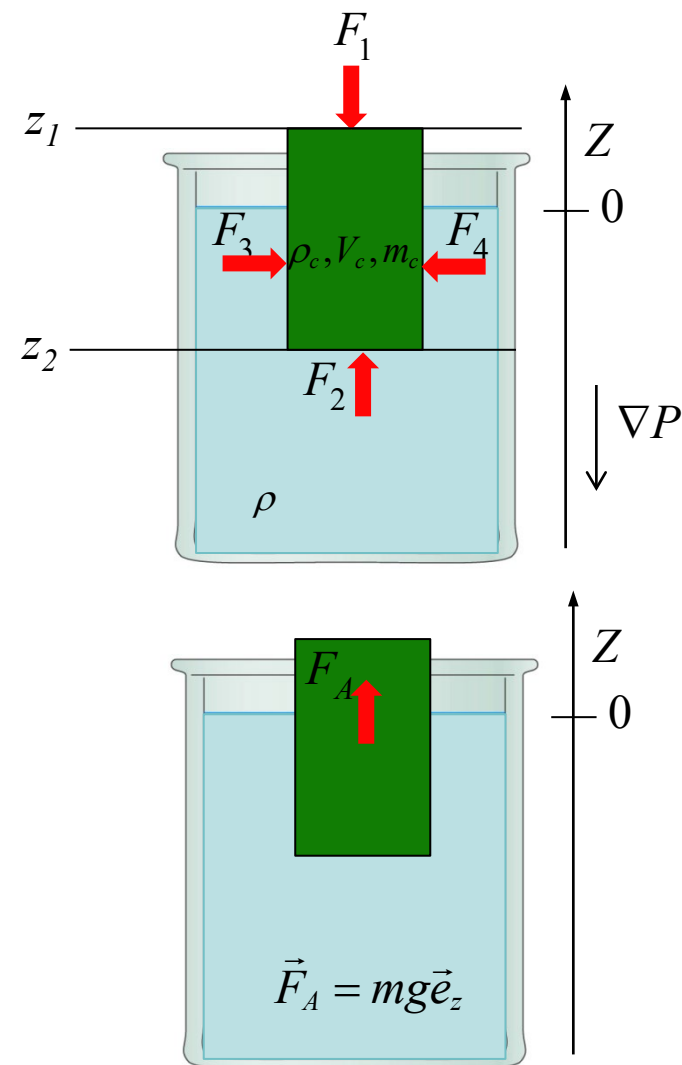
$$\vec{F}_1 = \int_{S_1} -P_1 d\vec{s}_1 = -P_0 S_1 \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_2 = \int_{S_2} -P_2 d\vec{s}_2 = (P_0 + \rho g |z_2|) S_2 \vec{e}_z$$

$$S_1 = S_2 \quad (\text{pour la forme du corps dans la figure}) \Rightarrow$$

$$\vec{F}_A = \rho g |z_2| S \vec{e}_z = \rho g V_{c,im} \vec{e}_z = mg \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_A = mg \vec{e}_z}$$



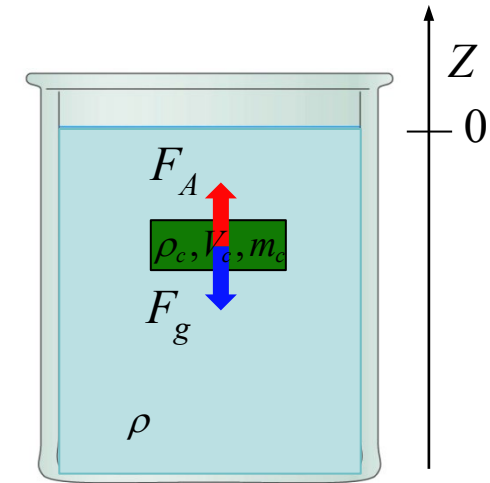
Note 1.

Pour un corps avec densité ρ_c uniforme dans un fluid avec densité uniforme ρ :

$$\frac{|\vec{F}_A|}{|\vec{F}_g|} = \frac{mg}{m_c g} = \frac{m}{m_c} = \frac{\rho V_c}{\rho_c V_c} = \frac{\rho}{\rho_c}$$

Le corps montera si: $\rho > \rho_c$ (position d'équilibre à la surface)

Le corps descendra si: $\rho < \rho_c$ (position d'équilibre au fond du récipient)



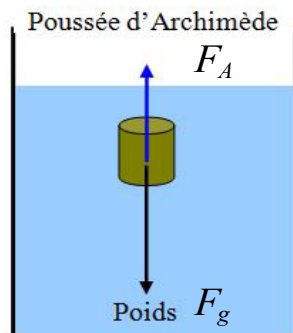
ρ :	densité du fluide
ρ_c :	densité du corps
V_c :	volume du corps
$m = V_c \rho$:	masse du fluide déplacé (corps entièrement immergé)
$m_c = \rho_c V_c$:	masse du corps

Note 2.

$$\vec{F}_A = mg\vec{e}_z \quad \vec{F}_g = -m_c g\vec{e}_z$$

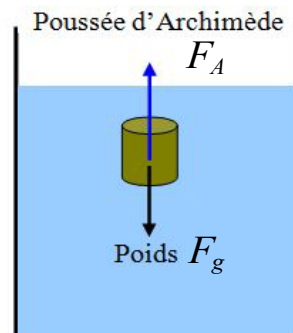
⇒ les deux forces sont indépendantes de la position z .

⇒ l'objet montera ou descendra indépendamment de la position z initiale.



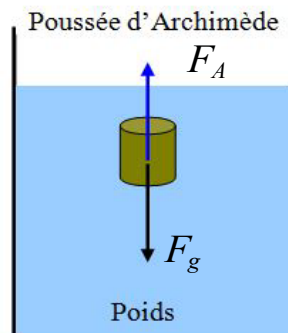
Coule

$$\begin{aligned} |F_g| &> |F_A| \\ |m_c| &> |m| \end{aligned}$$



Flotte

$$\begin{aligned} |F_g| &< |F_A| \\ |m_c| &< |m| \end{aligned}$$



Immobile

$$\begin{aligned} |F_g| &= |F_A| \\ |m_c| &= |m| \end{aligned}$$

ρ : densité du fluide
 ρ_c : densité du corps
 V_c : volume du corps
 $m = V_c \rho$: masse du fluide déplacé
 (corps entièrement immergé)
 $m_c = \rho_c V_c$: masse du corps

Note 3: Corps en équilibre en surface

$$\vec{F}_A = m g \vec{e}_z \quad \vec{F}_g = -m_c g \vec{e}_z$$

avec $m = \rho V_{c,im}$ (masse du fluide qui correspond au volume du corps immergé dans le fluide $V_{c,im}$).

$$\text{Condition d'équilibre: } |\vec{F}_A| = |\vec{F}_g| \Rightarrow$$

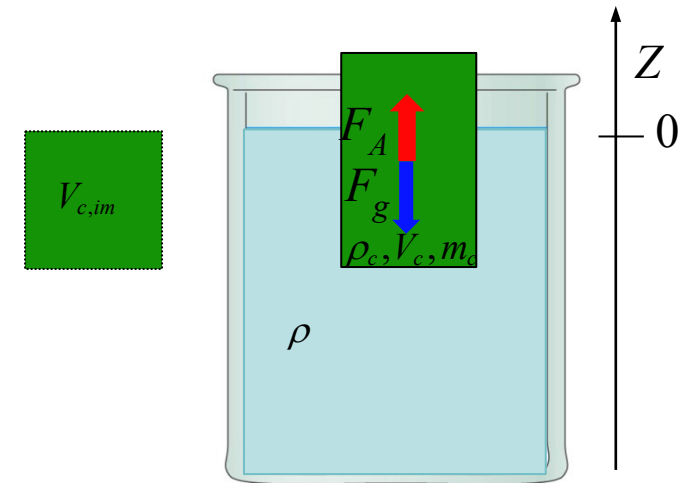
$$\Rightarrow mg = m_c g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = m_c$$

Pour un corps avec densité ρ_c uniforme dans un fluide avec densité uniforme ρ :

$$\Rightarrow \rho V_{c,im} = \rho_c V_c \Rightarrow \frac{V_{c,im}}{V_c} = \frac{\rho_c}{\rho}$$

donc, pour un corps en équilibre en surface, le rapport entre son volume immergé $V_{c,im}$ et son volume total V_c est égal au rapport entre la densité du corps ρ_c et celle du fluide ρ dans lequel il est immergé.



ρ : densité du fluide

ρ_c : densité du corps

$V_{c,im}$: volume du corps immergé dans le fluide

V_c : volume du corps

$m = V_{c,im} \rho$: masse du fluide déplacé

$m_c = \rho_c V_c$: masse du corps

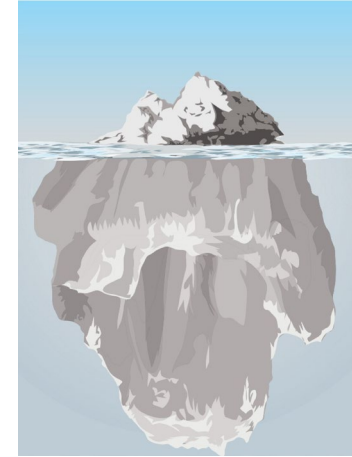
Note 4: Morceau de glace flottant sur l'eau

Considérons un morceau de glace pure flottant dans l'eau pure à 273 K.
Dans la note précédente, nous avons vu que :

$$\frac{V_{c,im}}{V_c} = \frac{\rho_c}{\rho}$$

Soit $\rho_c = 0,917 \text{ kg/dm}^3$ et $\rho = 0,998 \text{ kg/dm}^3$. Le rapport ρ_c / ρ est égal à 0,91 \rightarrow le volume immergé $V_{c,imm}$ est approx. 90% du volume total V du morceau de glace.

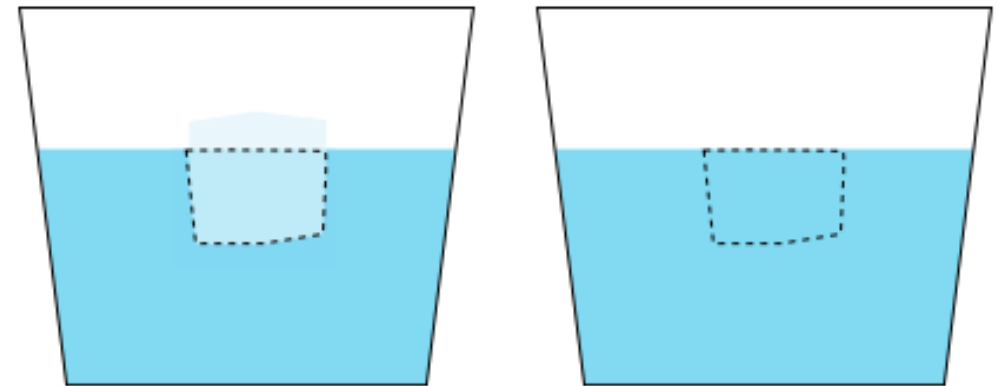
(pour un iceberg d'eau pure ou salée dans l'eau de mer salée le volume immergé est approx. de 90% du volume totale de l'iceberg).



Note 5: Morceau de glace dans l'eau flottant sur l'eau en fusion

La fonte d'un morceau de glace pure flottant sur de l'eau pure se produit sans changement de niveau de l'eau.

Le volume de glace immergée correspond au volume d'eau produit par la fonte du glaçon.



Note 6: Stabilité en rotation des corps immergés et flottants

La stabilité en rotation d'un corps immergé dépend des emplacements relatifs du **centre de gravité G** du corps, du **centre de la flottabilité B** , et du **métacentre M** .

Un corps immergé est stable si:

a) G est en-dessous du point B

ou

(b) M est au-dessus du point G

Le **centre de gravité** est le point où la somme des moments des forces gravitationnelles exercées sur les différentes parties du corps est nulle.

Le **centre de flottabilité** est le centre de gravité du volume de fluide déplacé (pas de l'objet lui-même). Le centre de flottabilité est le point d'application de la résultante des forces de poussée d'Archimède qui s'exercent sur un corps immergé (totalement ou partiellement) dans un fluide. Ce point dépend uniquement de la forme du volume immergé, et change de position si l'objet s'incline ou change d'immersion.

Le **métacentre M** est le point où une ligne verticale tracée vers le haut à partir du nouveau centre de flottabilité B' (B'' ,...) du corps incliné intersecte la ligne de symétrie du corps.

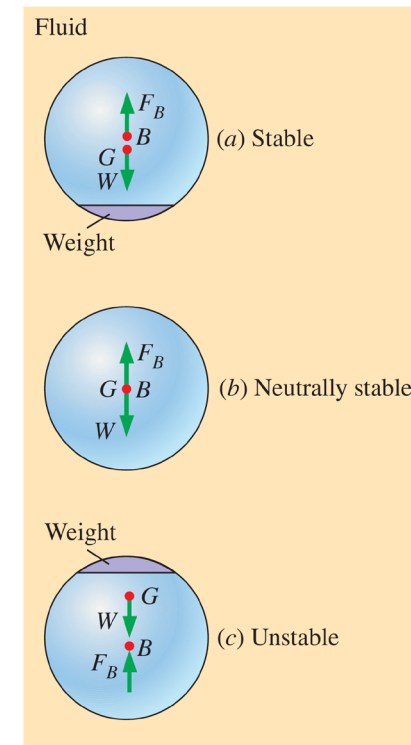
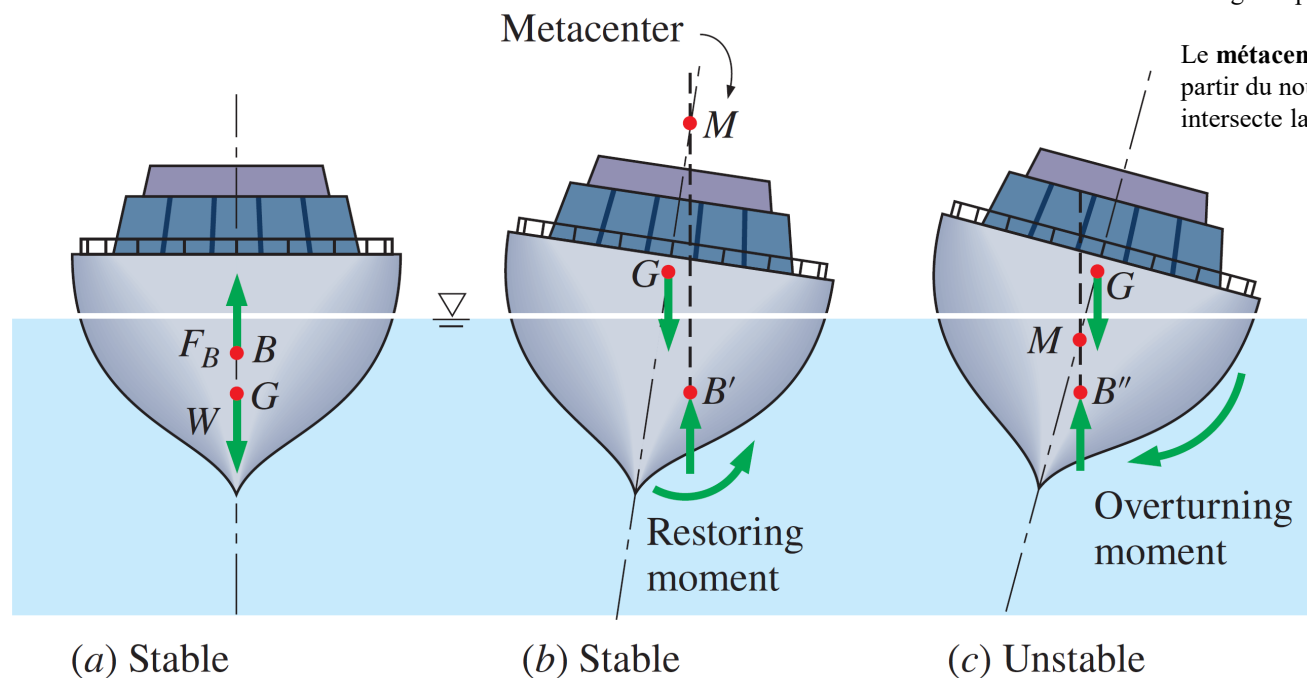
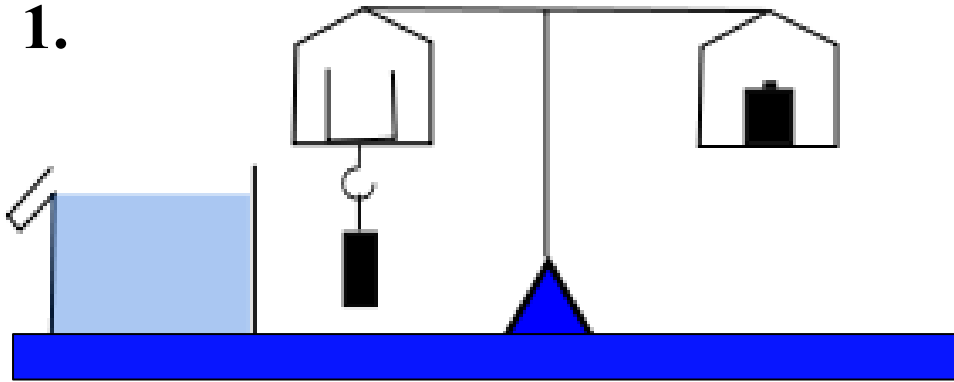


FIGURE 3-51

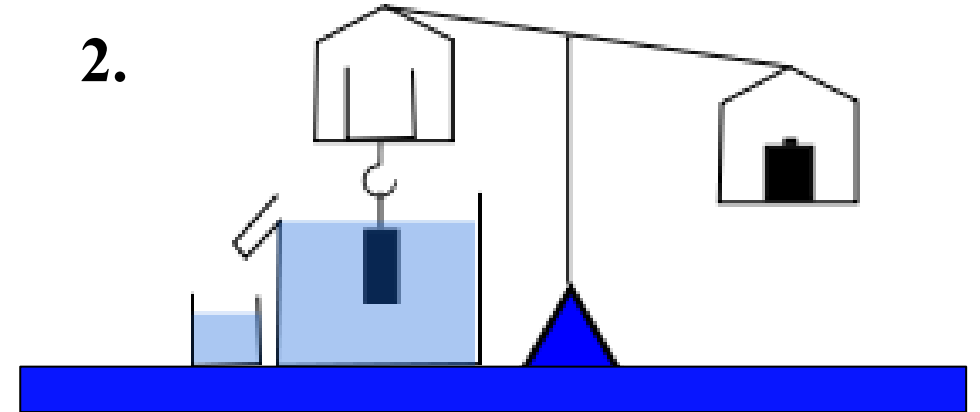
An immersed neutrally buoyant body is (a) stable if the center of gravity G is directly below the center of buoyancy B of the body, (b) neutrally stable if G and B are coincident, and (c) unstable if G is directly above B .

Note 7. Expérience pour la mise en évidence de la poussée d'Archimède avec une balance.

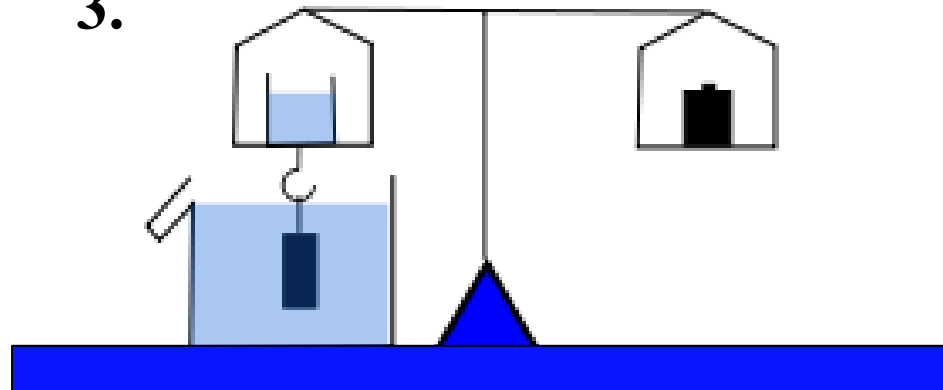
1.



2.



3.



Note 8. Force de surface.

En plus de la force de gravité et de la force de pression (poussée d'Archimède), il existe également la "force de surface" (force de van der Waals).

La force de surface explique plusieurs phénomènes bien connus.



$$\vec{F}_A + \vec{F}_g + \vec{F}_S = 0$$

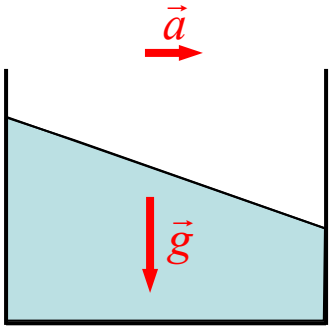
La flottaison d'un corps plus dense que l'eau se produit lorsque son poids est inférieur à la somme de la force de surface et de la poussée d'Archimède.

Les forces de van der Waals sont des forces électromagnétiques entre les dipôles électriques (permanents et/ou induits) des molécules.

Exercice: Equilibre statique dans système non inertielle

Déterminer la fonction $z(x)$ qui décrit la surface libre du fluide en fonction de la pesanteur g et de l'accélération du récipient a .

Il s'agit d'un problème de **statique** des fluides dans le système **non inertielle** du récipient accélérée.



Solution:

Equilibre statique dans le référentiel accéléré: $\vec{f} + \vec{f}_{ext} = 0$

Force externe: $\vec{f}_{ext} = \rho\vec{g} - \rho\vec{a}$ Force de pression: $\vec{f} = -\nabla P$

$$\Rightarrow -\nabla P + \rho\vec{g} - \rho\vec{a} = 0$$

mais: $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ $\vec{a} = a\vec{e}_x$

La force apparente dans le système non inertielle est dirigée dans la direction opposée à l'accélération du système non inertielle.

\Rightarrow

$$-\nabla P - \rho g \vec{e}_z - \rho a \vec{e}_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial P}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z - \rho g \vec{e}_z - \rho a \vec{e}_x = 0$$

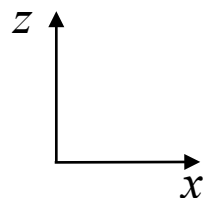
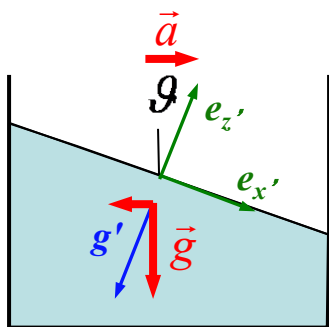
$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

mais $dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \Rightarrow dP = -\rho a dx - \rho g dz$

Pour une isobare: $dP = 0 \Rightarrow -\rho a dx - \rho g dz = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{a}{g} \Rightarrow z = -\frac{a}{g} x + const$

$$f = f(x, y, z) \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

La surface libre est une isobare (spécifiquement l'isobare à la pression atmosphérique)



Une autre solution équivalente:

$$\text{Si } \vec{g}' = (\vec{g} - \vec{a}) = -g' \vec{e}_z' \quad \Rightarrow \quad -\nabla P + \rho \vec{g}' = 0$$

mais:

$$z' = x \sin \theta + z \cos \theta \Rightarrow \nabla_{z'} = \sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z = \vec{e}_z'$$

$$\rho \vec{g}' = -\rho g' \vec{e}_z' = -\nabla(\rho g' z')$$

$$\Rightarrow -\nabla P - \nabla(\rho g' z') = 0 \Rightarrow -\nabla(P + \rho g' z') = 0 \quad \Rightarrow \quad P + \rho g' z' = \text{const}$$

(à la surface de séparation entre le liquide et l'air où la pression est la pression atmosphérique)

$$\text{Pour } P = \text{const} \quad \Rightarrow \quad g' z' = \text{const}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + g^2} (x \sin \theta + z \cos \theta) = \text{const} \Rightarrow z = -x \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\text{const}}{\cos \theta \sqrt{a^2 + g^2}}$$

$$\text{Mais } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{a}{g} \Rightarrow z = -\frac{a}{g} x + \text{const}'$$

En équilibre statique dans le ref. accéléré, les isobares (surfaces à pression constante) sont aussi les surfaces équipotentielles de la force totale (pesanteur + force d'inertie) !!